Ici comme dans l'examen final, les QCM représentent entre 30 et 35% de la note finale. Les réponses correctes comptent pour $2,5$ points s'il y a quatre réponses possibles, 1 point pour les questions de type « vrai-faux », et dans les deux cas, les réponses incorrectes ou absentes pour 0 point. **Il n'y a donc pas de points négatifs dans l'examen, le but étant de tester vos connaissances, et non ce que vous ne savez pas.** Il y a dix questions pour lesquelles on donne quatre réponses possibles, cinq questions vrai-faux (qui représentent donc $2,5\times 10+5\times 1=30$ points) ainsi que cinq exercices à rédaction détaillée représentant 70 points. Le total des points est donc égal à 100.

Questionnaire à choix multiples

Question 1 (2,5 points)**.** Soit $A\in \mathrm{M}_8(\mathbb{C})$ telle que $J(A)=J_4(4i)\oplus J_1(4i)\oplus J_2(\sqrt{5})\oplus J_1(\sqrt{5})$. Alors, le rapport $\kappa_A=\dfrac{\chi_A}{\mu_A}$ entre le polynôme caractéristique et le polynôme minimal est égal à

☐ $(X-4i)^4(X-\sqrt{5})^2$.
☐ $(X-4i)^2(X-\sqrt{5})^2$.
☐ 1.
☒ $(X-4i)(X-\sqrt{5})$.

En effet, la forme de Jordan montre que le polynôme caractéristique est égal à $(X-4i)^5(X-\sqrt{5})^3$ et que le polynôme minimal est égal à $(X-4i)^4(X-\sqrt{5})^2$.

Question 2 (2,5 points)**.** Soit $A\in \mathrm{M}_9(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont donnés respectivement par $\chi_A(X)=(-X-1)(X+7i)^3(X-\sqrt{2})^5$ et $\mu_A=(X+1)(X+7i)^2(X-\sqrt{2})^4$. Alors, la matrice de Jordan $J(A)$ de A est donnée par

☐ $J_1(-1)\oplus J_3(-7i)\oplus J_5(\sqrt{2})$.
☐ $J_1(-1)\oplus J_2(-7i)\oplus J_1(-7i)\oplus J_5(\sqrt{2})$.
☒ $J_1(-1)\oplus J_2(-7i)\oplus J_1(-7i)\oplus J_4(\sqrt{2})\oplus J_1(\sqrt{2})$.
☐ $J_1(-1)\oplus J_2(-7i)\oplus J_1(-7i)\oplus J_3(\sqrt{2})\oplus J_2(\sqrt{2})$.

Question 3 (2,5 points)**.** Laquelle des applications suivantes **n'est pas** une forme linéaire sur l'espace E donné, c'est-à-dire, un élément de E' ?

☐ $E=\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ est un corps) et $\mathrm{Tr}:E\to\mathbb{K}$ est la trace.
☒ $E=C^0(\mathbb{R})$ et $L:E\to\mathbb{R}, f\mapsto f(0)f(1)$.
☐ $E=C^1([0,1])\cap\{f:f(0)=0\}$ et $I:E\to\mathbb{R}, f\mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)\frac{dx}{x}$.
☐ $E=C^0(\mathbb{R})\cap\left\{f:\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty\right\}$ et $M:E\to\mathbb{R}, f\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$.

Question 4 (2,5 points)**.** Laquelle des applications suivantes **n'est** **pas** une forme bilinéaire sur l'espace E donné ?

- ☐ $E = \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B : E \times E \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$.
- ☒ $E = \mathbb{R}^4$ et $B : E \times E \to \mathbb{R}, ((x, y, z, t), (x', y', z', t')) \mapsto xy' + yt' + zx' + ty' + 1$.
- ☐ $E = \mathbb{C}^2$ et $B : E \times E, ((z, w), (z', w')) \mapsto zw' + wz'$.
- ☐ $E = C^0([0, 1])$ et $B : E \times E \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Question 5 (2,5 points)**.** Soit $V_1 = \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ et $V_2 = \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$. Alors, la dimension **réelle** de $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ est égale à

- ☐ 22.
- ☐ 44.
- ☐ 96.
- ☒ 192.

En effet, V_1 est de dimension complexe $2 \times 3 = 6$ et V_2 est de dimension complexe $4 \times 4 = 16$, ce qui montre que $V_1 \otimes V_2$ est de dimension complexe $6 \times 16 = 96$, et donc de dimension réelle $2 \times 96 = 192$.

Question 6 (2,5 points)**.** Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + 2xy + z^2 - 4yz + 2xz$. Alors, la signature de Q est égale à

- ☐ $(3, 0)$.
- ☐ $(0, 3)$.
- ☒ $(2, 1)$.
- ☐ $(1, 2)$.

On a

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy + z^2 - 4yz + 2xz &= x^2 + 2x(y + z) + z^2 - 4yz = (x + y + z)^2 - (y + z)^2 + z^2 - 4yz\\ &= (x + y + z)^2 - y^2 - 6yz = (x + y + z)^2 - (y + 3z)^2 + 9z^2,\end{aligned}$$

ce qui montre que la forme quadratique est de signature $(2, 1)$.

Question 7 (2,5 points). Laquelle des formes bilinéaires sur l'espace vectoriel réel V **n'est <u>pas</u>** un produit scalaire ?

- ☐ $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, x_k\, y_k$.
- ☐ $V = \mathbb{R}^4$, $\langle (x, y, z, t), (x', y', z', t') \rangle = 2xx' + yy' + xz + x'z' + 2zz' + tt'$.
- ☐ $V = \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$.
- ☒ $V = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, $\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$.

Question 8 (2,5 points). Soit V un espace vectoriel réel et $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ la norme issue du produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Parmi ces quatre réponses, trouver la formule qui **n'est <u>pas</u>** vérifiée pour tout $(x, y) \in V^2$:

- ☐ $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$.
- ☐ $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2$.
- ☐ $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2$.
- ☒ $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 + \frac{1}{4}\|x-y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2$.

La quatrième expression est identiquement nulle.

Question 9 (2,5 points). Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Parmi les propriétés suivantes, laquelle **n'est <u>pas</u>** vérifiée ?

- ☐ $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- ☐ Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, l'application affine $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b$ est une isométrie.
- ☒ $\det(A) = 1$.

On peut aussi avoir $\det(A) = -1$.

Question 10 (2,5 points). Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ une matrice symétrique ($A^t = A$). Parmi les propriétés suivantes, laquelle **n'est <u>pas</u>** vérifiée ?

- ☐ Les valeurs propres de A sont réelles.
- ☐ Les espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont deux-à-deux orthogonaux.
- ☒ Les valeurs propres de A sont des nombres algébriques.
- ☐ Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Vrai ou Faux ?

Question 11 (1 point)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique. Alors, A est diagonalisable.

☐ Vrai.

☒ Faux.

Le résultat du cours a été démontré pour les matrices symétriques réelles. Si on prend par exemple la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

son polynôme caractéristique vaut $(X-1)^2$, ce qui montre qu'elle serait semblable à l'identité si elle était diagonalisable. Or, la seule matrice semblable à l'identité est l'identité. La matrice A n'est donc pas diagonalisable. On peut aussi vérifier que $\dim(\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) = 1$.

Question 12 (1 point)**.** Soit $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant égal à -1. Alors, -1 est une valeur propre de A.

☒ Vrai.

☐ Faux.

C'est un calcul direct avec la décomposition vue en cours.

Question 13 (1 point)**.** Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(V)$ telle que $f^m = \mathrm{Id}_V$ (où $m \geq 2025$). Alors, les valeurs propres de f sont des puissances des racines de l'unité $\zeta_m = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{m}\right)$.

☒ Vrai.

☐ Faux.

Question 14 (1 point)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $1 \leq k \leq n$ et $(B, C) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ telles que $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Alors, A est diagonalisable si et seulement si C et D sont diagonalisables.

☒ Vrai.

☐ Faux.

Question 15 (1 point)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A est semblable à une matrice de Jordan.

☒ Vrai.

☐ Faux.

En effet, le polynôme caractéristique est scindé.

Questions ouvertes

Exercice 1 (15 points)**.** Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3\,v_n \\ v_{n+1} = 3\,u_n + v_n + 4\,w_n \\ w_{n+1} = 4\,v_n + w_n \end{cases} \quad \text{et}\ \ (u_0,v_0,w_0) = (1,0,1).$$

1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. En déduire une expression des suites $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Démonstration. 1. Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det\begin{pmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 3 & 1-X & 4 \\ 0 & 4 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)^3 - 9(1-X) - 16(1-X) = (1-X)((1-X)^2 - 25) \\ &= -(X-1)(X-6)(X+4).\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique étant scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

2. Pour trouver la matrice de passage, on calcule successivement

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

De même, on a

$$\mathrm{Ker}(A - 6\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$\mathrm{Ker}(A + 4\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n 2^{2n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

4. Il faut simplement calculer P^{-1}. Soit avec la méthode du pivot de Gauss ou la formule des cofacteurs, on trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n 2^{2n} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 2^n \cdot 3^{n+1} & 5 \cdot 6^n & 2^{n+2} \cdot 3^n \\ (-1)^n 3 \cdot 2^{2n} & (-1)^{n+1} 5 \cdot 2^{2n} & (-1)^n 2^{2n+2} \end{pmatrix}$$

et finalement

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n 2^{2n} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 2^n \cdot 3^{n+1} & 5 \cdot 6^n & 2^{n+2} \cdot 3^n \\ (-1)^n 3 \cdot 2^{2n} & (-1)^{n+1} 5 \cdot 2^{2n} & (-1)^n 2^{2n+2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{50} \times \begin{pmatrix} 32 + 2^n \cdot 3^{n+2} + (-1)^n 9 \cdot 2^{2n} & 5 \cdot 2^n \cdot 3^{n+1} + (-1)^{n+1} 15 \cdot 2^{2n} & -24 + 2^{n+2} \cdot 3^{n+1} + (-1)^n 3 \cdot 2^{2n+2} \\ 5 \cdot 2^n \cdot 3^{n+1} + (-1)^{n+1} 15 \cdot 2^{2n} & 25 \cdot 6^n + (-1)^n 25 \cdot 2^{2n} & 5 \cdot 2^{n+2} \cdot 3^n + (-1)^{n+1} 5 \cdot 2^{2n+2} \\ -24 + 2^{n+2} \cdot 3^{n+1} + (-1)^n 3 \cdot 2^{2n+2} & 5 \cdot 2^{n+2} \cdot 3^n + (-1)^{n+1} 5 \cdot 2^{2n+2} & 18 + 2^{n+4} \cdot 3^n + (-1)^n 2^{2n+4} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = PA^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 8+2^n\cdot 3^{n+2}+2^{n+2}\cdot 3^{n+1}+(-1)^n 9\cdot 2^{2n}+(-1)^n 3\cdot 2^{2n+2} \\ 5\cdot 2^n\cdot 3^{n+1}+5\cdot 2^{n+2}\cdot 3^n+(-1)^{n+1}15\cdot 2^{2n}+(-1)^{n+1}5\cdot 2^{2n+2} \\ -6+2^{n+2}\cdot 3^{n+1}+2^{n+4}\cdot 3^n+(-1)^n 3\cdot 2^{2n+2}+(-1)^n 2^{2n+4} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 8+7\cdot 2^n\cdot 3^{n+1}+(-1)^n 3\cdot 7\cdot 2^{2n} \\ 5\cdot 7\cdot 2^n\cdot 3^n+(-1)^{n+1}5\cdot 7\cdot 2^{2n} \\ -6+7\cdot 2^{n+2}\cdot 3^n+(-1)^n 7\cdot 2^{2n+2} \end{pmatrix}$$

et on vérifie aisément que cette formule est valable pour $n=0$, car

$$\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 8+7\cdot 2^n\cdot 3^{n+1}+(-1)^n 3\cdot 7\cdot 2^{2n} \\ 5\cdot 7\cdot 2^n\cdot 3^n+(-1)^{n+1}5\cdot 7\cdot 2^{2n} \\ -6+7\cdot 2^{n+2}\cdot 3^n+(-1)^n 7\cdot 2^{2n+2} \end{pmatrix}_{|n=0} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 8+21+21 \\ 35-35 \\ -6+28+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 2 (15 points)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} i-1 & 0 & 0 & -i \\ i & -3 & 1 & -i-4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -i & 1 & 0 & i+2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A = (X-i)^2(X+2)^2 \in \mathbb{C}[X]$.
2. Calculer la multiplicité géométrique des valeurs propres de A.
3. Trouver le polynôme minimal de A.
4. En déduire la forme de Jordan de A.
5. Trouver une base de Jordan de A.

Démonstration. 1. En développant par rapport à la troisième ligne, on obtient

$$\det\begin{pmatrix} i-1-X & 0 & 0 & -i \\ i & -3-X & 1 & -i-4 \\ 0 & 0 & -2-X & 0 \\ -i & 1 & 0 & i+2-X \end{pmatrix}$$
$$= -(X+2)\begin{vmatrix} i-1-X & 0 & -i \\ i & -3-X & -i-4 \\ -i & 1 & i+2-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X+2)\left((i-1-X)(-3-X)(i+2-X)+1-(X+3)+(i+4)(i-1-X)\right)$$
$$= -(X+2)(-X^3+2(i-1)X^2+(4i+1)X+2).$$

Comme le polynôme caractéristique nous est donné, il suffit de vérifier que

$$-(X-i)^2(X+2) = -X^3 + 2(i-1)X^2 + (4i+1)X + 2,$$

et en effet, on a

$$(X-i)^2(X+2) = (X^2 - 2iX - 1)(X+2) = X^3 + 2(1-i)X^2 - (1+4i)X - 2.$$

2. On a

$$\mathrm{Ker}\,(A - i\,\mathrm{I}_4) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -i \\ i & -3-i & 1 & -i-4 \\ 0 & 0 & -2-i & 0 \\ -i & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $v = (x,y,z,t)^t \in \mathrm{Ker}(A - i\,\mathrm{I}_4)$, on obtient successivement $z = 0$, $x = -i\,t$, et

$$0 = -i(-i\,t) + y + 2t = y + t,$$

ce qui donne $y = -t$. Par conséquent, on obtient

$$\mathrm{Ker}\,(A - i\,\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et la multiplicité géométrique de $\lambda_1 = i$ est égale à 1. De même, on a

$$\mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_4) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 & -i \\ i & -1 & 1 & -i-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & i+4 \end{pmatrix}.$$

Si $v = (x,y,z,t)^t \in \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_4)$, en ajoutant la 4ème ligne à la 2ème ligne, on obtient $z = 0$, $t = (1-i)x$, et comme $x + y + 4t = 0$, on trouve $y = (-5+4i)x$, et

$$\mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -5+4i \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix},$$

et la multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda_2 = -2$ est égale à 1.

3. et 4. Comme les multiplicités géométriques sont égales à 1, la forme de Jordan est $J(A) = J_2(i) \oplus J_2(-2)$, ce qui montre que le polynôme minimal est $\mu_A = (X-i)^2(X+2)^2$.

5. Pour trouver une base de Jordan, on calcule

$$(A - i\,\mathrm{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & -i \\ 0 & 5i+4 & -2i-5 & 5i+4 \\ 0 & 0 & 4i+3 & 0 \\ 0 & -i-1 & 1 & -i-1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $v = (x, y, z, t)^t \in \mathrm{Ker}(A - i\,\mathrm{I}_4)^2$ si et seulement si $z = 0$ et $y + t = 0$. On choisit donc le vecteur

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - i\,\mathrm{I}_4)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - i\,\mathrm{I}_4)$$

et on définit

$$u_1 = (A + 2\,\mathrm{I}_4)u_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -i \\ i & -3-i & 1 & -i-4 \\ 0 & 0 & -2-i & 0 \\ -i & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

De même, on a

$$(A + 2\,\mathrm{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 2i-1 & -i & 0 & -5i+2 \\ 4i-2 & -i-3 & -1 & -7i-10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4i+2 & i+3 & 1 & 7i+10 \end{pmatrix}$$

On a donc $v = (x, y, z, t)^t \in \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_4)^2$ si et seulement si

$$-i\,y = (1-2i)x + (-2+5i)t \Longleftrightarrow y = (2+i)x + (-5-2i)t.$$

En ajoutant $2(L_1)$ à (L_4), on obtient l'équation

$$\begin{aligned}(3-i)y + z + (14-3i)t = 0 \Longleftrightarrow z &= (-3+i)y + (-14+3i)t \\ &= (-3+i)(2+i)x + (-3+i)(-5-2i)t + (-14+3i)t \\ &= -(7+i)x + (3+4i)t.\end{aligned}$$

On peut donc prendre

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ -7-i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_4)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_4),$$

et on trouve

$$v_1 = (A + 2\,\mathrm{I}_4)v_2 = \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 & -i \\ i & -1 & 1 & -i-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & i+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ -7-i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+1 \\ -9-i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_4).$$

Finalement, si

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i+1 & 1 \\ i & 0 & -9-i & 2+i \\ 0 & 0 & 0 & -7-i \\ -i & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$A = PJ(A)P^{-1} = P \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$\square$

Exercice 3 (20 points)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. Sa matrice compagnon est définie par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Supposons que $n \leq 3$. Montrer que $\chi_{C(P)} = P$ si $n = 2$ et $\chi_{C(P)} = -P$ pour $n = 3$, où pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, χ_A est le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que $\chi_{C(P)} = (-1)^n P$.

Supposons dans la suite de l'exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit $A = \{a_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et posons pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad D_i = \mathbb{C} \cap \{z : |z| \leq r_i\}.$$

Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$, soit $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

3. Montrer que pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, si $x \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à λ, on a pour tout $1 \leq i \leq n$: $|\lambda x_i| \leq r_i \|x\|_\infty$.
4. Montrer que
$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$
5. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que pour toute racine λ de P, on a l'inégalité
$$|\lambda| \leq \max\{|a_0|, |a_1| + 1, |a_2| + 1, \cdots, |a_{n-1}| + 1\}.$$
6. Cette inégalité est-elle optimale ?

Démonstration. 1. On a trivialement

$$\det \begin{pmatrix} -X & -a_0 \\ 1 & -a_1 - X \end{pmatrix} = X(X + a_1) + a_0 = X^2 + a_1 X + a_0$$

et en développant par rapport à la dernière ligne, on trouve

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -X & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 - X \end{pmatrix} &= -(X + a_2)X^2 + \det \begin{pmatrix} -X & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \\ &= -(X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0). \end{aligned}$$

2. En général, on développe sur la dernière ligne :

$$\begin{aligned}
\chi_{C(P)} &= (-1)^n(X+a_{n-1})X^{n-1} - \det\begin{pmatrix} -X & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & -X & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1}) - (-1)^{n-1}a_{n-2}X^{n-2} + \det\begin{pmatrix} -X & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & -X & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-3} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2}) + (-1)^{n-2}a_{n-3}X^{n-3} \\
&- \det\begin{pmatrix} -X & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & -X & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-4} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n\left(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X + a_0\right)
\end{aligned}$$

par une récurrence immédiate.

3. On a $Ax = \lambda x$, ce qui montre que pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a

$$\lambda\, x_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j.$$

L'inégalité triangulaire montre donc que

$$|\lambda\, x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\, \|x\|_\infty = r_i\, \|x\|_\infty\, .$$

4. On obtient par conséquent

$$|\lambda|\, \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda x_i| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} r_i\right) \|x\|_\infty\, ,$$

et comme $\|x\|_\infty > 0$ (on a $x \notin 0$ car x est un vecteur propre, et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme), on peut diviser par $\|x\|_\infty$, ce qui donne

$$|\lambda| \leq \max_{1\leq i\leq n} r_i,$$

et comme

$$\bigcup_{i=1}^{n} D_i = \overline{D}\left(0, \max_{1\leq i\leq n} r_i\right),$$

la valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$ étant arbitraire, on en déduit que $\sigma(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(0, r_i)$.

5. En utilisant la matrice compagnon $C(P)$, on voir que $r_1 = |a_0|$ et que $r_i = |a_i| + 1$ pour tout $2 \leq i \leq n$. Comme $\chi_{C(P)} = (-1)^n P$, on en déduit que les valeurs propres de $C(P)$ sont exactement données par les racines de P (avec multiplicité), ce qui montre par l'inégalité précédente que pour toute racine λ de P, on a

$$|\lambda| \leq \max\left\{|a_0|, |a_1| + 1, |a_2| + 1, \cdots, |a_{n-1}| + 1\right\}$$

6. L'inégalité est optimale. Soit $a_1 > 0$, $a_0 = -(1 + a_1)$ et $P = X^2 - a_1\, X - (1 + a_1)$. On a $\Delta = a_1^2 + 4(1 + a_1) = (a_1 + 2)^2$, ce qui montre que les racines sont égales à

$$\lambda_1 = \frac{a_1 - (a_1 + 2)}{2} = -1 \qquad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{a_1 + (a_1 + 2)}{2} = a_1 + 1,$$

ce qui montre que $\lambda_2 = a_1 + 1 = |a_1| + 1$ et l'inégalité est donc optimale. □

Exercice 4 (20 points)**.** Supposons qu'il existe deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 = -\mathrm{I}_n, \qquad B^2 = -\mathrm{I}_n, \qquad AB + BA = 0_n, \tag{1}$$

où $0_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

1. Démontrer que n ne peut être impair.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré par les matrices I_n, A, B et AB est une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, qu'il est stable par multiplication matricielle.
3. Soit $C = AB$. Pour tout $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, calculer le produit

$$(t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C)\,(t\,\mathrm{I}_n - x\,A - y\,B - z\,C)\,.$$

4. En déduire :
   (i) Que les quatre matrices I_n, A, B et C sont indépendantes et forment une base de $\mathbb{H}$.
   (ii) Que $\mathbb{H}$ est un corps.
5. **On suppose dans la suite du problème que** $n = 4$**.** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} J & 0_2 \\ 0_2 & -J \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0_2 & -\mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

On définit également $C = AB$.

(i) Montrer que les matrices A et B satisfont aux conditions de l'équation (1). On appellera donc $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I_4, A, B et C. Ses éléments sont appelés des **quaternions**.

(ii) Soit $M \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Vérifier que $M^t \in \mathbb{H}$. Quel lien y a-t-il entre M^t et l'inverse M^{-1} ?

Démonstration. 1. En utilisant la propriété d'homomorphisme multiplicatif du déterminant, on a $\det(A^2) = \det(A)^2 \geq 0$, or $\det(-\mathrm{I}_n) = (-1)^n$, ce qui montre que $(-1)^n = \det(A)^2 \geq 0$. Par conséquent, n doit être pair.

2. Soit $C = AB$. Comme $AB = -BA$, on calcule $AC = A^2B = -B$, $CA = ABA = -BA^2 = B$, $BC = BAB = -AB^2 = A$ et enfin $CB = AB^2 = -A$. Enfin, on a $C^2 = (AB)(AB) = -(BA)(AB) = -B(A^2)B = B^2 = -\mathrm{I}_n$ en vertu de l'associativité du produit matriciel. En d'autres termes, on a les relations suivantes

$$\begin{cases} A^2 = B^2 = C^2 = -\mathrm{I}_n \\ AB = -BA = C \\ BC = -CB = A \\ CA = -AC = B \end{cases} \tag{2}$$

Si on note $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_3 = C$, on en déduit en utilisant des indices sur $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ que $A_iA_{i+1} = -A_{i+1}A_i = A_{i+2}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_3$. On voit donc que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication matricielle.

3. On calcule donc en utilisant la table (2) précédente

$$\begin{aligned}
&(t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C)\,(t\,\mathrm{I}_n - x\,A - y\,B - z\,C) = t^2\,\mathrm{I}_n - \cancel{xt\,A} - \cancel{yt\,B} - \cancel{zt\,C} \\
&+ \cancel{xt\,A} - x^2\,A^2 - xy\,AB - xz\,AC + \cancel{yt\,B} - xy\,BA - y^2B^2 - yz\,BC \\
&+ \cancel{zt\,C} - xz\,CA - yz\,CB - z^2C^2 \\
&= (x^2+y^2+z^2+t^2)\mathrm{I}_n - xy\,(AB+BA) - xz(AC+CA) - yz(BC+CB) \\
&= (x^2+y^2+z^2+t^2)\mathrm{I}_n
\end{aligned}$$

car $A_iA_{i+1} = -A_{i+1}A_i$ et $A_i^2 = -\mathrm{I}_n$ avec les notations précédentes.

4. (i) En effet, s'il existe $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C = 0$, on obtient également

$$\begin{aligned}
0 &= (t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C)\,(t\,\mathrm{I}_n - x\,A - y\,B - z\,C) \\
&= (x^2+y^2+z^2+t^2)\mathrm{I}_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que $x^2+y^2+z^2+t^2 = 0$, ce qui montre que $x = y = z = t = 0$ (une somme de carrés de nombres réels est nulle si et seulement si chaque nombre est nul).

(ii) Pour tout $v \in \mathbb{H}$, il existe $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $v = t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C$. Si $v \neq 0$, on obtient donc $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 0$, et si

$$w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}\left(t\,\mathrm{I}_n - x\,A - y\,B - z\,C\right),$$

le calcul précédent montre que $vw = \mathrm{I}_n$. De plus, en appliquant le calcul précédent à w, on trouve

$$wv = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}\left((-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2 + t^2\right)\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.$$

La multiplication matricielle étant associative, et comme tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un unique inverse, on en déduit que $\mathbb{H}$ est un corps. On notera cependant que $\mathbb{H}$ est un corps *non-commutatif* : en général, l'identité $xy = yx$ n'est pas vérifiée.

5. (i) On calcule aisément

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -C.$$

Comme $J^2 = -\mathrm{I}_2$, on peut calculer par blocs

$$A^2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & (-J)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_2 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_4,$$

et de même, on a

$$B^2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_2 \cdot \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_2 \cdot (-\mathrm{I}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_2 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_4.$$

(ii) Comme $A^t = -A$, $B^t = -B$ et $C^t = -C$, pour tout $M \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ il existe $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tels que $M = t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C$, et on obtient donc

$$M^t = (t\,\mathrm{I}_n + x\,A + y\,B + z\,C) = t\,\mathrm{I}_n + x\,A^t + y\,B^t + z\,C^t = t\,\mathrm{I}_n - x\,A - y\,B - z\,C,$$

ce qui montre que

$$M^t = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)M^{-1}.$$

□